

Чистый изгиб кривого бруса (задача Х. С. Головина 1881 г.).

Рассмотрим чистый изгиб кривого бруса (внутренний радиус $a=1$, внешний $b=3$ (рис. 13.1).

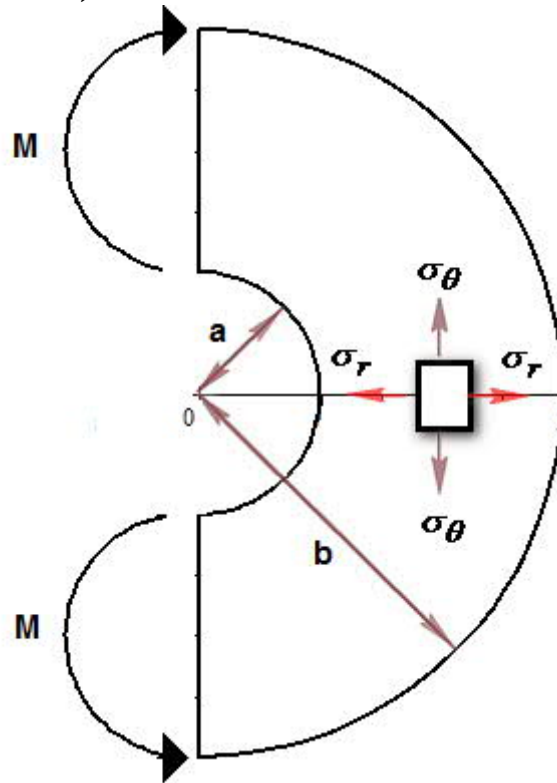


Рис. 13.1. Чистый изгиб кривого бруса

Во всех радиальных сечениях, включая сечения, где приложены моменты $\mathbf{M}$, напряжения одинаково распределены, т.е. поле напряжений полярно-симметрично. В тоже время перемещения u и v будут несимметричны. При наличии осевой симметрии функция напряжений зависит только от r , т.е. $\Phi = \Phi(r)$. Поэтому бигармоническое уравнение (уравнение совместности деформаций) принимает вид

$\frac{d^4}{dr^4} \Phi(r) + \frac{2}{r} \left(\frac{d^3}{dr^3} \Phi(r) \right) - \frac{d^2}{dr^2} \Phi(r) + \frac{d}{dr} \Phi(r) = 0$	(13.1)
--	--------

Общее решение дифференциального уравнения(13.1) имеет вид

$\Phi(r) = C_1 r^2 + C_2 r^2 \ln(r) + C_3 + C_4 \ln(r) .$	(13.2)
---	--------

Выражение окружных и радиальных нормальных напряжений через функцию напряжений имеет вид:

$\sigma_r = \frac{d}{dr} \frac{\Phi(r)}{r}, \quad \sigma_\theta = \frac{d^2}{dr^2} \Phi(r) .$	(13.3)
---	--------

Подстановка(13.2)в(13.3)дает (константа $_C3$ -в выражениях(13.2)при дифференцировании исчезает):

$\sigma_r = \frac{2_C1 r + 2_C2 r \ln(r) + _C2 r + \frac{C4}{r}}{r}$ $\sigma_\theta = 2_C1 + 2_C2 \ln(r) + 3_C2 - \frac{C4}{r^2}.$	(13.4)
--	--------

Для бруса (рис. 13.1)условия на поверхности имеют вид:

$\sigma_r(r = b) = 0, \sigma_r(r = a) = 0$	(13.5)
--	--------

Окружные напряжения $\sigma_\theta(r)$ в каждом радиальном сечении распределены по некоторому закону (пока неизвестному) и приводятся к паре **М**. Поперечное сечение бруса прямоугольное $(b - a) \cdot 1$ - единичной толщины, следовательно

$\int_a^b r \sigma_\theta(r) dr = M$	(13.6)
--------------------------------------	--------

С учетом выражений(13.4)условия(13.5) (13.6)примут вид

$\frac{2_C1 a + 2_C2 a \ln(a) + _C2 a + \frac{C4}{a}}{a} = 0,$ $\frac{2_C1 b + 2_C2 b \ln(b) + _C2 b + \frac{C4}{b}}{b} = 0,$ $-_C1 a^2 -_C2 \ln(a) a^2 -_C2 a^2 +_C4 \ln(a) +_C1 b^2 +_C2 \ln(b) b^2 +_C2 b^2 -_C4 \ln(b) = M$	(13.7)
---	--------

Матрица системы уравнений и ее определитель:

$D = \begin{bmatrix} 2 & \frac{2 a \ln(a) + a}{a} & \frac{1}{a^2} \\ 2 & \frac{2 b \ln(b) + b}{b} & \frac{1}{b^2} \\ -a^2 + b^2 & -\ln(a) a^2 - a^2 + \ln(b) b^2 + b^2 & -\ln(b) + \ln(a) \end{bmatrix},$ $\Delta = -\frac{1}{a^2 b^2} (-8 a^2 b^2 \ln(b) \ln(a) + 4 a^2 b^2 \ln(b)^2 - a^4 + 2 a^2 b^2 + 4 b^2 a^2 \ln(a)^2 - b^4)$	(13.8)
--	--------

Решаем по правилу Крамера:

$D1 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{2a \ln(a) + a}{a} & \frac{1}{a^2} \\ 0 & \frac{2b \ln(b) + b}{b} & \frac{1}{b^2} \\ M & -\ln(a) a^2 - a^2 + \ln(b) b^2 + b^2 & -\ln(b) + \ln(a) \end{bmatrix},$ $\Delta_1 = \frac{M(2 \ln(a) a^2 + a^2 - 2 \ln(b) b^2 - b^2)}{a^2 b^2}, \quad {}_{-}CI = \frac{\Delta_1}{\Delta};$ $D2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & \frac{1}{a^2} \\ 2 & 0 & \frac{1}{b^2} \\ -a^2 + b^2 & M & -\ln(b) + \ln(a) \end{bmatrix},$ $\Delta_2 = -\frac{2M(a^2 - b^2)}{a^2 b^2}, \quad {}_{-}C2 = \frac{\Delta_2}{\Delta};$ $D3 = \begin{bmatrix} 2 & \frac{2a \ln(a) + a}{a} & 0 \\ 2 & \frac{2b \ln(b) + b}{b} & 0 \\ -a^2 + b^2 & -\ln(a) a^2 - a^2 + \ln(b) b^2 + b^2 & M \end{bmatrix},$ $\Delta_3 = -4M(-\ln(b) + \ln(a)), \quad {}_{-}C4 = \frac{\Delta_3}{\Delta}.$	(13.9)
---	---------------

Таким образом, для констант интегрирования получаем следующие выражения

$\begin{aligned} {}_{-}CI &= ((2b^2 \ln(b) + b^2 - 2a^2 \ln(a) - a^2)M) / (-8a^2 \ln(a) b^2 \ln(b) \\ &\quad + 4a^2 \ln(b)^2 b^2 + 4a^2 \ln(a)^2 b^2 - a^4 - b^4 + 2a^2 b^2) \end{aligned},$ $\begin{aligned} {}_{-}C2 &= (2(-b^2 + a^2)M) / (-8a^2 \ln(a) b^2 \ln(b) + 4a^2 \ln(b)^2 b^2 \\ &\quad + 4a^2 \ln(a)^2 b^2 - a^4 - b^4 + 2a^2 b^2) \end{aligned},$ $\begin{aligned} {}_{-}C4 &= -(4Ma^2 b^2 (-\ln(a) + \ln(b))) / (-8a^2 \ln(a) b^2 \ln(b) \\ &\quad + 4a^2 \ln(b)^2 b^2 + 4a^2 \ln(a)^2 b^2 - a^4 - b^4 + 2a^2 b^2) \end{aligned}.$	(1310)
---	---------------

Подставляем выражения для констант в выражения для напряжений (6.4). В результате получаем:

$\begin{aligned} \sigma_r &= -(4M(-r^2 b^2 \ln(b) + r^2 a^2 \ln(a) + r^2 \ln(r) b^2 - r^2 \ln(r) a^2 \\ &\quad - b^2 a^2 \ln(a) + a^2 b^2 \ln(b))) / (r^2 (-8a^2 \ln(a) b^2 \ln(b) \\ &\quad + 4a^2 \ln(b)^2 b^2 + 4a^2 \ln(a)^2 b^2 - a^4 - b^4 + 2a^2 b^2)) \end{aligned},$	(1311)
---	---------------

$$\sigma_{\theta} = \left(4M(r^2 b^2 \ln(b) - r^2 b^2 - r^2 a^2 \ln(a) + r^2 a^2 - r^2 \ln(r) b^2 + r^2 \ln(r) a^2 - b^2 a^2 \ln(a) + a^2 b^2 \ln(b)) \right) / \left(r^2 (-8a^2 \ln(a) b^2 \ln(b) + 4a^2 \ln(b)^2 b^2 + 4a^2 \ln(a)^2 b^2 - a^4 - b^4 + 2a^2 b^2) \right)$$

Для графической иллюстрации результатов зададимся следующими исходными данными: $M=1\text{кНм}$, $a=1\text{м}$, $b=3\text{м}$. На рис. 6.2 (в одном масштабе) показаны графики изменения радиальных и тангенциальных (окружных) напряжений по высоте сечения ($h=b-a$).

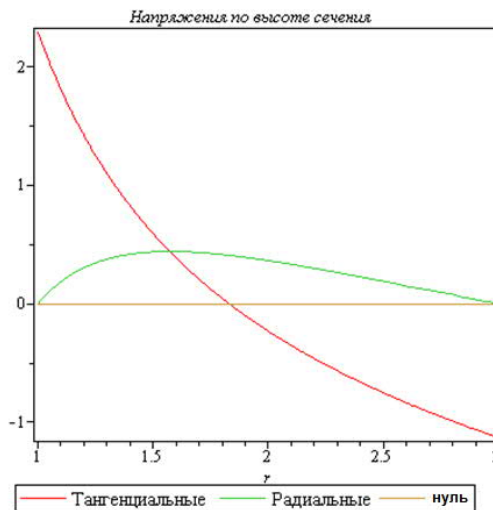


Рис.13.2. Радиальные и тангенциальные напряжения

На рис. 13.3 показан деформированный вид бруса и эпюры напряжений. Зеленым цветом на рис.13.3,б показана линия, в точках которой $\sigma_{\theta} = 0$ (нейтральная линия). Нейтральная линия смещена от оси бруса к центру кривизны.

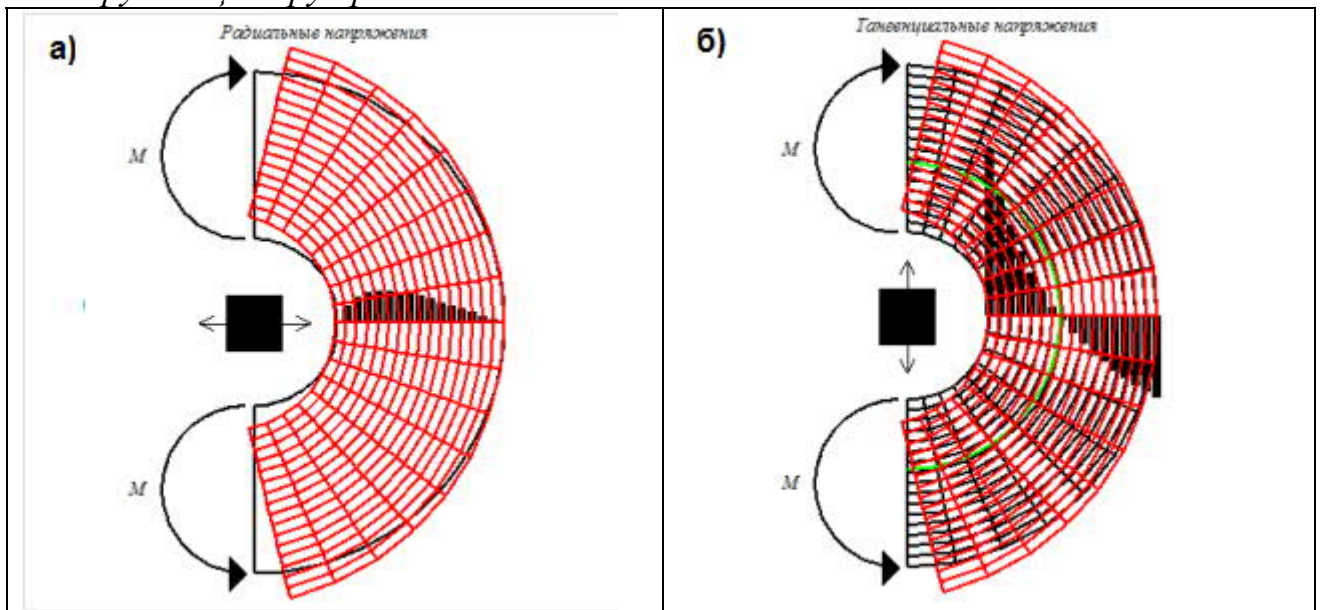


Рис.13.3. Эпюры радиальных и окружных напряжений